DISEÑO DE COMPOSICION CENTRAL

DISEÑOS DE COMPOSICION CENTRAL

DISEÑOS PARA AJUSTAR EL MODELO DE SEGUNDO ORDEN

Por lo general debido a la curvatura de la superficie real, el experimentador requiere un modelo cuyo grado sea mayor que o igual a 2. En la mayoría de los casos, el modelo de segundo orden:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_i \sum_i \beta_{ij} x_i \, x_j \qquad i < j$$

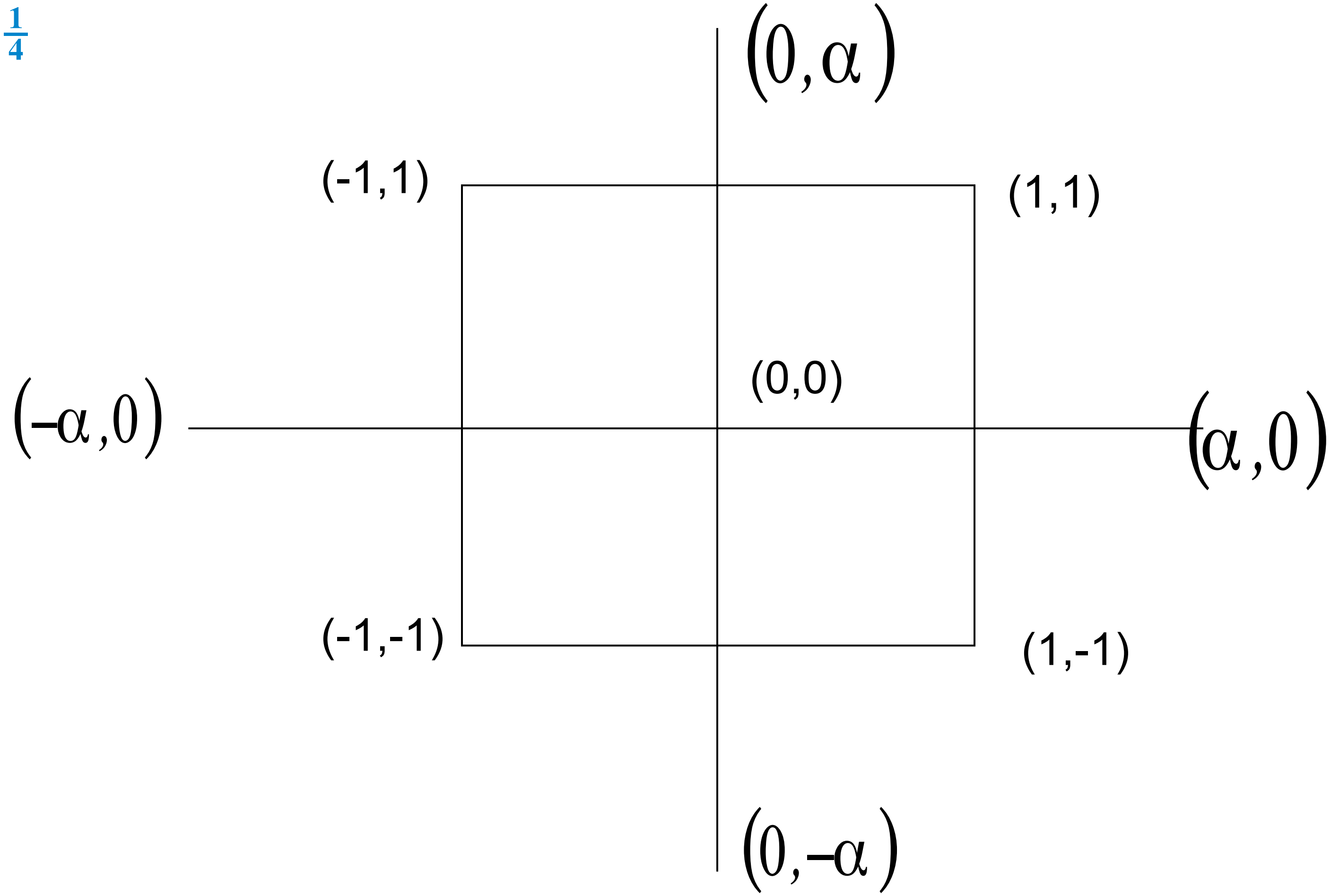
es adecuado

DISEÑOS DE COMPOSICION CENTRAL

- Este es uno de los diseños mas usados para propósitos de optimización, se conocen como diseño de composición central.
- Estos diseños se construyen con base en factoriales con dos niveles (lo cual permite la estimación de efectos principales e interacciones)
- Además, incluyen un conjunto de puntos en los ejes (llamados puntos estrella), los cuales junto con el punto central (por lo general, repetido) permiten estimar los términos cuadráticos puros

Para 2 factores $\alpha = 1.4142$, para 3 factores $\alpha = 1.6818$, para 4 factores $\alpha = 2$, para 5 es $\alpha = 2.3784$.

$$\alpha = \left(2^K\right)^{\frac{1}{4}}$$



Ejemplo 3. Continuando con el ejemplo del ingeniero, al existir curvatura, se decidió realizar un diseño de composición central como se muestra a continuación:

Variables	Naturales	Variables	Codificadas	Respuesta
ε_1	ε_2	x_1	x_2	Y
80	170	-1	-1	76.5
90	170	1	-1	78
80	180	-1	1	77
90	180	1	1	79.5
85	175	0	0	79.9
85	175	0	0	80.3
85	175	0	0	80.0
85	175	0	0	79.7
85	175	0	0	79.8
92.07	175	1.414	0	78.4
77.93	175	-1.414	0	75.6
85	182.02	0	1.414	78.5
85	167.93	0	-1.414	77.0

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 - 85}{5}$$

$$x_2 = \frac{\varepsilon_2 - 175}{5}$$

$$\alpha = 1.4142$$

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
A:X1	7.9198	1	7.9198	111.93	0.00000
B:X2	2.12316	1	2.12316	30.01	0.00090
AA	13.1761	1	13.1761	186.21	0.00000
AB	0.25	1	0.25	3.53	0.10220
BB	6.97389	1	6.97389	98.56	0.00000
Error total	0.49531	7	0.0707586		
Total (corr.)	28.7431	12			

R-cuadrada = 98.2768 porciento
R-cuadrada (ajustada por g.l.) = 97.0459 porciento

INFLUYE EL TIEMPO, LA TEMPERATURA, ADEMAS EL EFECTO CUADRATICO DEL TIEMPO Y EL EFECTO CUADRATICO DE TEMPERATURA. CON UNA CONFIANZA ESTADISTICA DEL 95%.

Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico T	Valor-P
CONSTANTE	79.94	0.118961	671.985	0.0000
X1	0.994976	0.094047	10.5796	0.0000
X2	0.515166	0.094047	5.47775	0.0009
X1*X2	0.25	0.133002	1.87967	0.1022
X1*X1	-1.37625	0.100854	-13.6459	0.0000
X2*X2	-1.00125	0.100854	-9.92769	0.0000

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Modelo	28.2478	5	5.64955	79.84	0.0000
Residuo	0.49531	7	0.0707586		
Total (Corr.)	28.7431	12			

R-cuadrada = 98.2768 porciento

R-cuadrado (ajustado para g.l.) = 97.0459 porciento

Rendimiento = 79.94 + 0.994976*X1+ 0.515166*X2 + 0.25*X1*X2 - 1.37625*X1*X1- 1.00125*X2*X2

MEJOR MODELO REGRESION

Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico T	Valor-P
CONSTANTE	79.94	0.136502	585.633	0.0000
X1	0.994976	0.107914	9.22006	0.0000
X2	0.515166	0.107914	4.77384	0.0014
X1*X1	-1.37625	0.115725	-11.8924	0.0000
X2*X2	-1.00125	0.115725	-8.65195	0.0000

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Modelo	27.9978	4	6.99944	75.13	0.0000
Residuo	0.74531	8	0.0931637		
Total (Corr.)	28.7431	12			

R-cuadrada = 97.407 porciento
R-cuadrado (ajustado para g.l.) = 96.1105 porciento

Rendimiento = 79.94 + 0.994976*X1+ 0.515166*X2 - 1.37625*X1*X1 - 1.00125*X2*X2

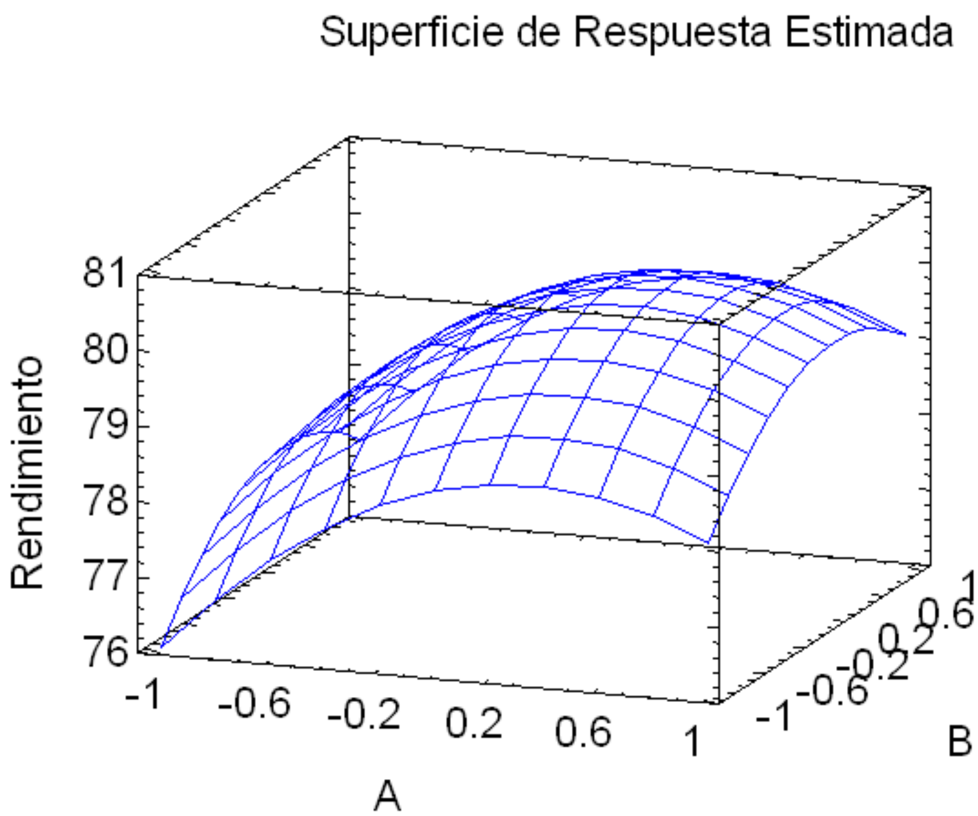
MEJOR ANOVA

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
A:A	7.9198	1	7.9198	85.01	0.0000
B:B	2.12316	1	2.12316	22.79	0.0014
AA	13.1761	1	13.1761	141.43	0.0000
BB	6.97389	1	6.97389	74.86	0.0000
Error total	0.74531	8	0.0931637		
Total (corr.)	28.7431	12			

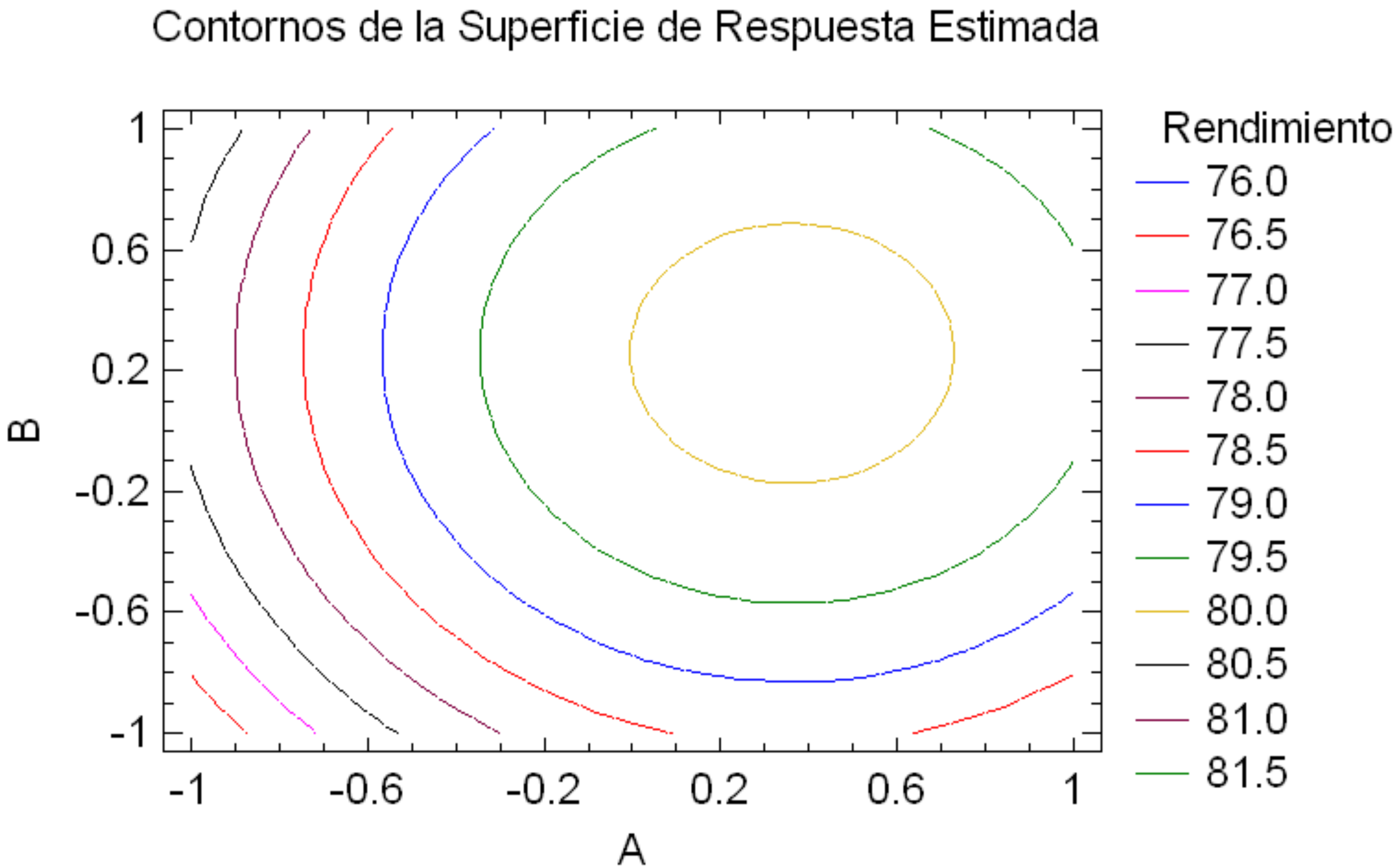
R-cuadrada = 97.407 porciento
R-cuadrada (ajustada por g.l.) = 96.1105 porciento

INFLUYE EL TIEMPO, LA TEMPERATURA, ADEMAS EL EFECTO CUADRATICO DEL TIEMPO Y EL EFECTO CUADRATICO DE TEMPERATURA. CON UNA CONFIANZA ESTADISTICA DEL 95%.

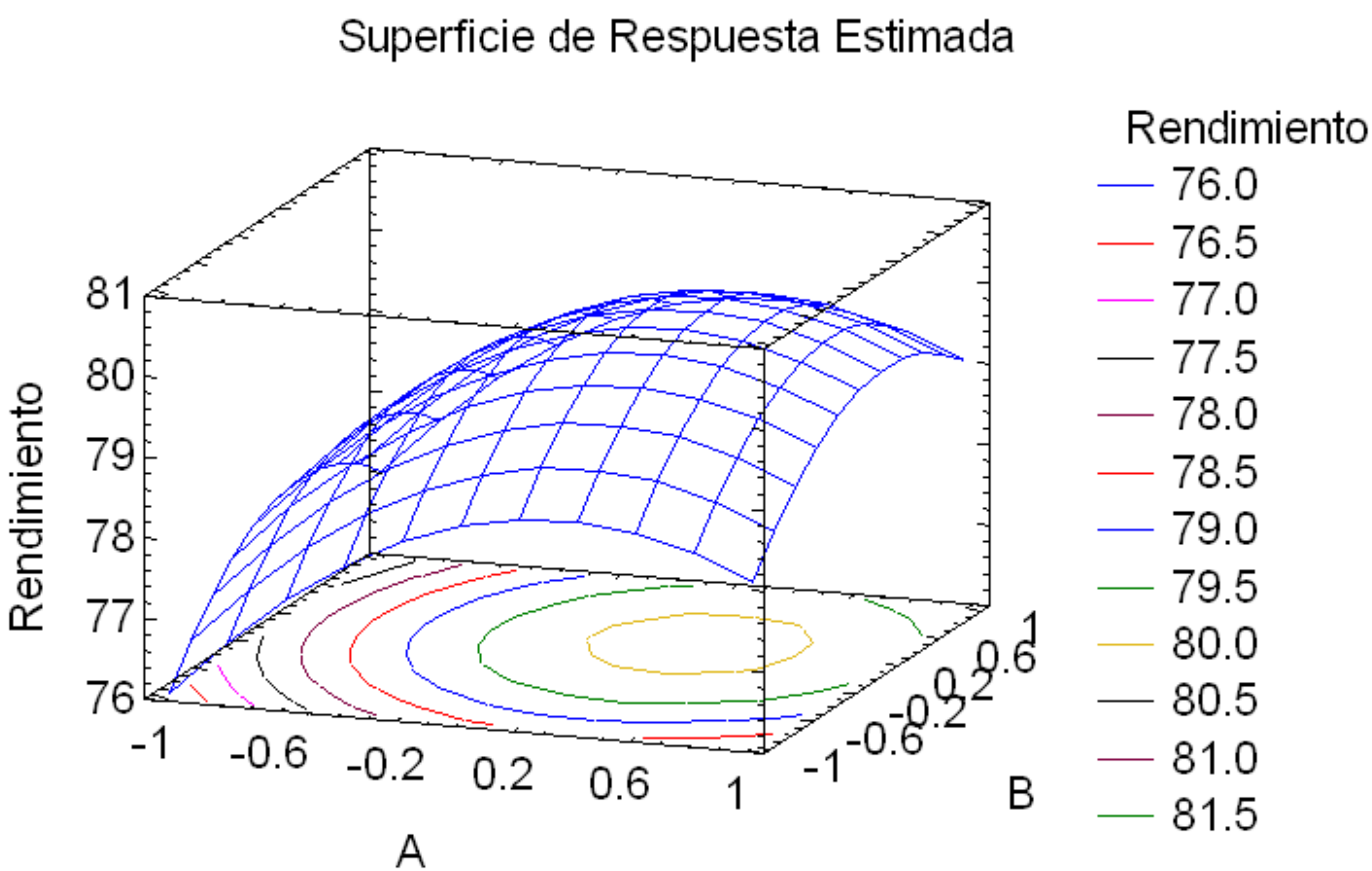
Rendimiento = 79.94 + 0.994976*X1+ 0.515166*X2 - 1.37625*X1*X1 - 1.00125*X2*X2



Rendimiento = 79.94 + 0.994976*X1+ 0.515166*X2 - 1.37625*X1*X1 - 1.00125*X2*X2



Rendimiento = 79.94 + 0.994976*X1+ 0.515166*X2 - 1.37625*X1*X1 - 1.00125*X2*X2



LOCALIZACIÓN DEL PUNTO MAXIMO O MINIMO

Supongamos que se desea determinar los niveles X1, X2, X3,.....,Xk que optimizan la variable de respuesta predicha. Este optimo, si existe, será el conjunto de X1, X2, X3,.....,Xk, tal que las derivadas parciales

$$\partial y / \partial x_1 = \partial y / \partial x_2 = \ldots = \partial y / \partial x_k = 0$$

Dicho punto, es decir $x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, \ldots, x_{k,0},$

Es punto máximo o mínimo.

Una solución general para el punto estacionario, es la siguiente:

$$y = \beta_0 + x'b + x'Bx$$

$$\mathbf{X}= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}= \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}= \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21}/2 \ldots\ldots & \beta_{1k}/2 \\ & \beta_{22} \ldots\ldots & \beta_{2k}/2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & & \beta_{kk} \end{bmatrix}$$

La derivada de *y* con respecto *x* e igualada a cero es

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mathrm{b} + 2\mathrm{Bx} = 0$$

derivando esta ecuación y resolviendo para *x* tenemos que el punto estacionario es

$$X_o = -\frac{1}{2} B^{-1} b$$

Para encontrar el punto estacionario del ejemplo del ingeniero, se procede así:

Rendimiento = 79.94 + 0.994976*X1+ 0.515166*X2 - 1.37625*X1*X1 - 1.00125*X2*X2

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.51 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1.3770 & 0 \\ 0 & -1.0018 \end{bmatrix}$$

$$xo = -\frac{1}{2} B^{-1} b$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -.72621 & 0 \\ 0 & -0.99820 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3594 \\ 0.2545 \end{bmatrix}$$

$$X_o = \begin{bmatrix} 0.3594 \\ 0.2545 \end{bmatrix}$$

ES UN PUNTO DE RESPUESTA MAXIMA

$$0.3594 = \frac{\varepsilon_1 - 85}{5}$$ **y** $$0.2545 = \frac{\varepsilon_2 - 175}{5}$$

$$\varepsilon 1 = 86.79$$

$$\varepsilon 2 = 176.2725$$

Evaluando el punto estacionario en el modelo de regresión:

Rendimiento = 79.94 + 0.994976*X1+ 0.515166*X2 - 1.37625*X1*X1 - 1.00125*X2*X2

Rendimiento = 79.94 + 0.994976*(0.3594)+ 0.515166*(0.2545) - 1.37625*(0.3594)*(0.3594) - 1.00125*(0.2545)*(0.2545)

Rendimiento= 80.18

Se obtendría un rendimiento del 80%, Con lo que la ingeniera logra duplicar el rendimiento del proceso.

SERAACE

Servicio de Actualización Académica y Capacitación en Estadística