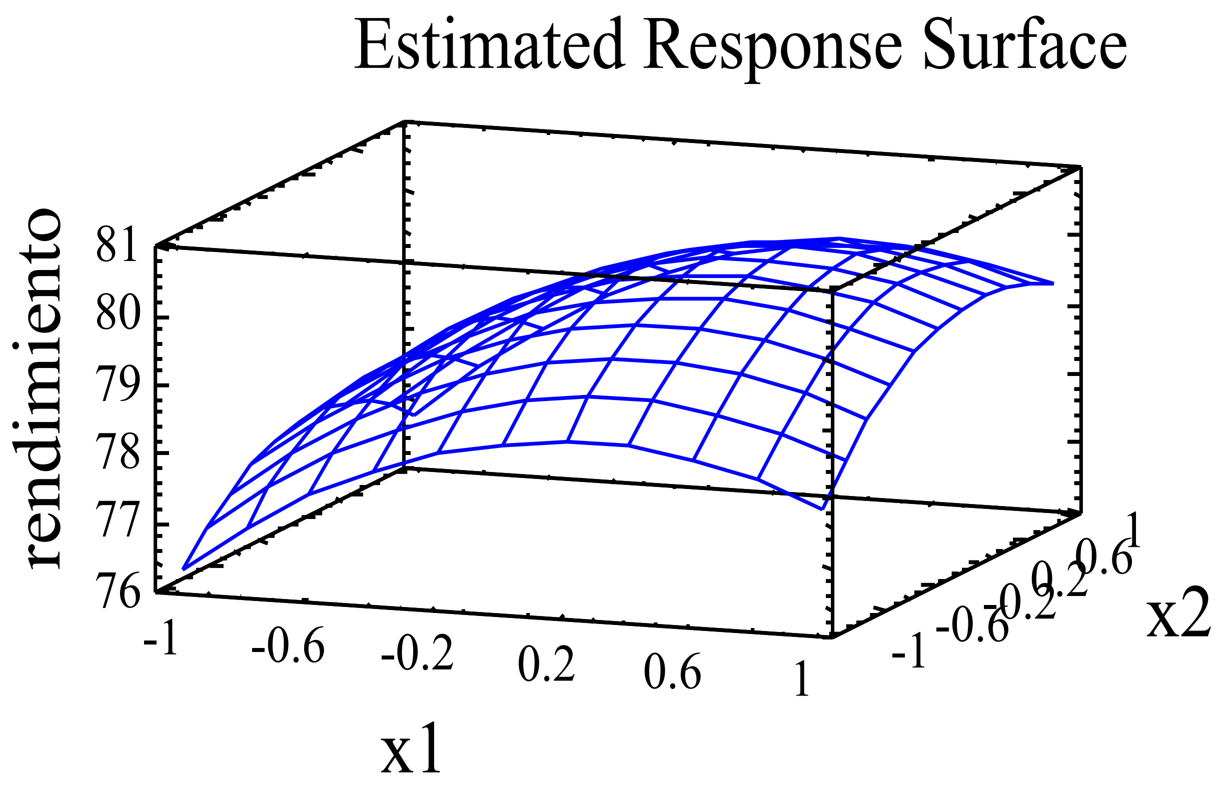
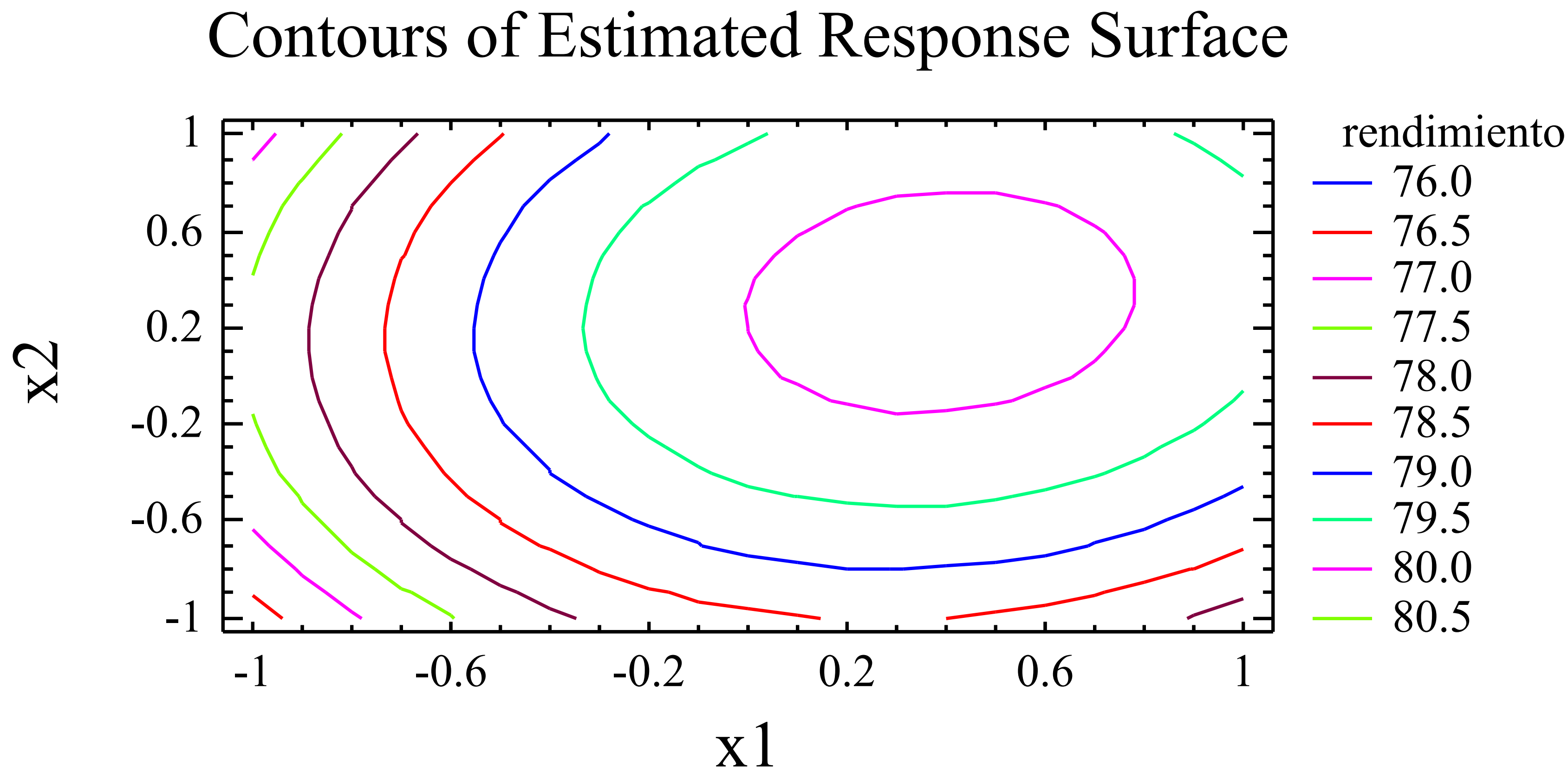
INTRODUCCIÓN A LA METODOLOGÍA DE SUPERFICIES DE REPUESTA

La metodología de superficies de respuestas, (MSR o RSM, por sus siglas en inglés) es un conjunto de técnicas matemáticas y estadísticas útiles para modelar y analizar problemas en los cuales una respuesta de interés es influida por varias variables (factores, 2 a 6), y el objetivo es optimizar esta respuesta.

GRAFICA DE SUPERFICIE DE RESPUESTA





Contours of Estimated Response Surface
x2
1
0.6
0.2
-0.2
-0.6
-1
-1
-0.6
-0.2
0.2
0.6
1
x1
rendimiento
76.0
76.5
77.0
77.5
78.0
78.5
79.0
79.5
80.0
80.5

Por lo general se emplea un polinomio de orden bajo sobre alguna región de las variables independientes. Si la respuesta es descrita adecuadamente por una función lineal de las variables independientes, la función de aproximación es el modelo de primer orden

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots\ldots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

Cuando existe curvatura, debe usarse un polinomio de mayor grado, por ejemplo el modelo de segundo orden,

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_{ii}^2 + \sum_i \sum_j \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

Casi todos los problemas de RSM utilizan uno o ambos polinomios de aproximación.

- **Este tipo de diseños normalmente se emplea en las últimas fases de la experimentación**

- **Su aplicación se hace indispensable, si después de haber identificado los factores significativos (a través de experimentos de diagnóstico), se considera necesario explorar la relación entre factor y la variable dependiente dentro de la región experimental, y no solamente en las fronteras (como se hace en los diseños factoriales).**

- **Estos diseños y su optimización constituyen la fase final; por lo tanto, en algunos casos, no se requerirá de su utilización.**

DISEñO DE MAXIMA PENDIENTE EN ASCENSO

MÉTODO DE MÁXIMA PENDIENTE EN ASCENSO

- **El método de máxima pendiente con ascenso es un procedimiento para recorrer secuencialmente a lo largo de la trayectoria de la máxima pendiente; en otras palabras, en la dirección del máximo incremento de la respuesta.**
- **Por supuesto, si se desea la minimización se hablará del método de máxima pendiente en descenso. El modelo de primer orden ajustado es**

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots\ldots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

En la trayectoria de la máxima pendiente:

- **Los incrementos a lo largo de la trayectoria son proporcionales a los coeficientes de regresión.**

- **El tamaño del incremento lo determina el experimentador con base a su experiencia con el proceso u otras consideraciones prácticas.**

EJEMPLO 1

- **Se desea maximizar el rendimiento de una reacción. Dos variables controlables influyen en este rendimiento: el tiempo y la temperatura de reacción. Actualmente el opera sobre el proceso con un tiempo de reacción de 35 minutos y a una temperatura de 155^{0}F, con lo que se obtiene un rendimiento cerca del 40%.**
- **Se ajustará un modelo de primer orden y se aplicará el método de ascenso máximo.**
- **El ingeniero decide que la región de exploración para ajustar el modelo de primer orden debe ser (30, 40) minutos de reacción y (150, 160)^{0}F. Por lo que efectúa el siguiente diseño experimental:**

Variables Naturales	
Tiempo	Temperatura
ε_1	ε_2
30	150
40	150
30	160
40	160
35	155
35	155
35	155
35	155
35	155

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 - 35}{5}$$

$$x_2 = \frac{\varepsilon_2 - 155}{5}$$

Variables Naturales		Variables Codificados	
Tiempo	Temperatura	Tiempo	Temperatura
ε_1	ε_2	X_1	X_2
30	150	-1	-1
40	150	1	-1
30	160	-1	1
40	160	1	1
35	155	0	0
35	155	0	0
35	155	0	0
35	155	0	0
35	155	0	0

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 - 35}{5}$$

$$x_2 = \frac{\varepsilon_2 - 155}{5}$$

Variables Naturales		Variables Codificadas		Respuesta
Tiempo	Temperatura	Tiempo	Temperatura	Y
ε_1	ε_2	X_1	X_2	
30	150	-1	-1	39.3
40	150	1	-1	40.9
30	160	-1	1	40.0
40	160	1	1	41.5
35	155	0	0	40.3
35	155	0	0	40.6
35	155	0	0	40.7
35	155	0	0	40.2
35	155	0	0	40.6

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 - 35}{5}$$

$$x_2 = \frac{\varepsilon_2 - 155}{5}$$

PASOS PARA EL ANALISIS

1. Realizar un análisis de varianza para ver la significancia de los factores (aquí podemos ver si hay o no curvatura).

2. Encontrar el modelo de regresión de primer orden.

3. Investigar la idoneidad del modelo de primer orden mediante el anova

Resultados del primer paso: ANALISIS DE VARIANZA

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
A:X1	2.4025	1	2.4025	51.12	0.0020
B:X2	0.4225	1	0.4225	8.99	0.0400
X1*X2	0.0025	1	0.0025	0.05	0.8289
Falta de ajuste	0.00672222	1	0.00672222	0.14	0.7245
Error puro	0.188	4	0.047		
Total (corr.)	3.02222	8			

CON UNA CONFIANZA DEL 95%, SE CONCLUYE QUE INFLUYE EL TIEMPO Y LA TEMPERATURA, NO HAY EFECTO DE INTERACCION Y NO HAY EFECTO DE CURVATURA.

Resultados del segundo paso: MODELO DE REGRESION MULTIPLE, CON EL METODO DE FORWARD

Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico T	Valor-P
CONSTANTE	40.4556	0.060434	669.418	0.0000
A:X1	0.775	0.0906509	8.54928	0.0001
B:X2	0.325	0.0906509	3.58518	0.0116

Resultado del tercer paso:

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Modelo	2.825	2	1.4125	42.97	0.0003
Residuo	0.197222	6	0.0328704		
Total (Corr.)	3.02222	8			

R-cuadrada = 93.4743 porciento	
R-cuadrado (ajustado para g.l.) = 91.299 porciento	

RENDIEMIENTO = 40.4556 + 0.775*X1 + 0.325*X2

Trayectoria de máximo ascenso

Para alejarse del centro del diseño a lo largo de la trayectoria de máximo ascenso es necesario desplazarse 0.775 unidades en la dirección de x1 por cada 0.325 unidades en la dirección de x2. Por consiguiente, la trayectoria de máximo ascenso pasa por el punto (x1=0, x2=0) y tiene una pendiente igual a 0.325/0.775.

RENDIEMIENTO = 40.4556 + 0.775*X1 + 0.325*X2

Trayectoria de máximo ascenso

Si iniciamos con un tiempo de 35 y nos movemos a un tiempo de 40, con la relación siguiente

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 - 35}{5}$$ tenemos que $$x_1 = \frac{40 - 35}{5} = 1$$

lo que significa que el incremento de tiempo de reacción de 5 minutos en la variable natural es equivalente a 1 en la variable codificada, es decir $\Delta x_1 = 1$

De esta forma los incrementos a lo largo de la trayectoria de máximo ascenso son:

$$\Delta x_1 = 1 \qquad \Delta x_2 = (0.325/0.775)\Delta x_1$$

Nótese que el incremento de x2 depende del incremento en x1, como el incremento en x1 es igual a 1, el incremento de x2 es:

Paso 1

$$\Delta x_1 = 1 \qquad \Delta x_2 = (0.325/0.775)\,(1) = 0.4193$$

Paso 2

$$\Delta x_1 = 2 \qquad \Delta x_2 = (0.325/0.775)\,(2) = 0.8386$$

Paso 3

$$\Delta x_1 = 3 \qquad \Delta x_2 = (0.325/0.775)\,(3) = 1.2579$$

	Variable Codificada	
Incrementos	X1	X2
Origen	0	0
Incremento	1	0.4193
Origen + un	1	0.4193
Origen + dos	2	0.8386
Origen + tres	3	1.2579
Origen + cuatro	4	1.6772
Origen + cinco	5	2.0965
Origen + seis	6	2.5158
Origen + siete	7	2.9351
Origen + ocho	8	3.3544
Origen + nueve	9	3.7737
Origen + diez	10	4.193
Origen + once	11	4.6123
Origen + doce	12	5.0316

$\Delta x_1 = 1 \qquad \Delta x_2 = (0.325/0.775)\Delta x_1$

Paso 1

$\Delta x_1 = 1 \quad \Delta x_2 = (0.325/0.775)\,(1) = 0.4193$

Paso 2

$\Delta x_1 = 2 \quad \Delta x_2 = (0.325/0.775)\,(2) = 0.8386$

Paso 3

$\Delta x_1 = 3 \quad \Delta x_2 = (0.325/0.775)\,(3) = 1.2579$

	Variable Codificada	
Incrementos	X1	X2
Origen	0	0
Incremento	1	0.4193
Origen + un	1	0.4193
Origen + dos	2	0.8386
Origen + tres	3	1.2579
Origen + cuatro	4	1.6772
Origen + cinco	5	2.0965
Origen + seis	6	2.5158
Origen + siete	7	2.9351
Origen + ocho	8	3.3544
Origen + nueve	9	3.7737
Origen + diez	10	4.193
Origen + once	11	4.6123
Origen + doce	12	5.0316

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 - 35}{5} \qquad x_2 = \frac{\varepsilon_2 - 155}{5}$$

	Variable Codificada		Variables naturales	
Incrementos	X1	X2		
Origen	0	0	35	155
Incremento	1	0.4193	5	2.09
Origen + un	1	0.4193	40	157.09
Origen + dos	2	0.8386	45	159.18
Origen + tres	3	1.2579	50	161.27
Origen + cuatro	4	1.6772	55	163.36
Origen + cinco	5	2.0965	60	165.45
Origen + seis	6	2.5158	65	167.54
Origen + siete	7	2.9351	70	169.63
Origen + ocho	8	3.3544	75	171.72
Origen + nueve	9	3.7737	80	173.81
Origen + diez	10	4.193	85	175.9
Origen + once	11	4.6123	90	177.99
Origen + doce	12	5.0316	95	180.09

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 - 35}{5}$$

$$x_2 = \frac{\varepsilon_2 - 155}{5}$$

	Variable Codificada		Variables naturales		Respuesta
Incrementos	X1	X2	E1	E2	
Origen	0	0	35	155	
Incremento	1	0.4193	5	2.09	
Origen + un	1	0.4193	40	157.09	41.0
Origen + dos	2	0.8386	45	159.18	42.9
Origen + tres	3	1.2579	50	161.27	47.1
Origen + cuatro	4	1.6772	55	163.36	49.7
Origen + cinco	5	2.0965	60	165.45	53.8
Origen + seis	6	2.5158	65	167.54	59.9
Origen + siete	7	2.9351	70	169.63	65.0
Origen + ocho	8	3.3544	75	171.72	70.4
Origen + nueve	9	3.7737	80	173.81	77.6
Origen + diez	10	4.193	85	175.9	80.3
Origen + once	11	4.6123	90	177.99	*76.2*
Origen + doce	12	5.0316	95	180.09	*75.1*

	Variable Codificada		Variables naturales		Respuesta
Incrementos	**X1**	**X2**			
Origen	**0**	**0**	**35**	**155**	
Incremento	**1**	**0.4193**	**5**	**2.09**	
Origen + un	**1**	**0.4193**	**40**	**157.09**	**41.0**
Origen + dos	**2**	**0.8386**	**45**	**159.18**	**42.9**
Origen + tres	**3**	**1.2579**	**50**	**161.27**	**47.1**
Origen + cuatro	**4**	**1.6772**	**55**	**163.36**	**49.7**
Origen + cinco	**5**	**2.0965**	**60**	**165.45**	**53.8**
Origen + seis	**6**	**2.5158**	**65**	**167.54**	**59.9**
Origen + siete	**7**	**2.9351**	**70**	**169.63**	**65.0**
Origen + ocho	**8**	**3.3544**	**75**	**171.72**	**70.4**
Origen + nueve	**9**	**3.7737**	**80**	**173.81**	**77.6**
Origen + diez	**10**	**4.193**	**85**	**175.9**	**80.3**
Origen + once	**11**	**4.6123**	**90**	**177.99**	***76.2***
Origen + doce	**12**	**5.0316**	**95**	**180.09**	***75.1***

- En los niveles de 85 minutos de tiempo y 175 de temperatura se obtiene un rendimiento del 80%.
- A partir de los niveles 85 minutos de tiempo y 175 de temperatura se observa un descenso en el rendimiento.
- Se realiza un nuevo diseño 2 a la k con puntos centrales.
- El punto central será 85 de tiempo y 175 de temperatura y los niveles de tiempo serán de 80 a 90 minutos y de la temperatura sean de 170 a 180 grados.

Ejemplo 2

El ingeniero observa que con los niveles de 85 minutos de tiempo y 175 de temperatura obtiene un rendimiento del 80%, además que a partir de ahí se observa un descenso en la variable de respuesta. Por lo que decide efectuar otro diseño experimental donde los niveles de tiempo sean de 80 a 90 minutos y de la temperatura sean de 170 a 180 grados. El nuevo diseño es

Variables Naturales		Variables Codificadas	
ε_1	ε_2	X_1	X_2
80	170	-1	-1
90	170	1	-1
80	180	-1	1
90	180	1	1
85	175	0	0
85	175	0	0
85	175	0	0
85	175	0	0
85	175	0	0

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 - 85}{5}$$

$$x_2 = \frac{\varepsilon_2 - 175}{5}$$

Variables	Naturales	Variables	Codificadas	Respuesta
ε_1	ε_2	X_1	X_2	Y
80	170	-1	-1	76.5
90	170	1	-1	78
80	180	-1	1	77
90	180	1	1	79.5
85	175	0	0	79.9
85	175	0	0	80.3
85	175	0	0	80.0
85	175	0	0	79.7
85	175	0	0	79.8

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 - 85}{5} \qquad x_2 = \frac{\varepsilon_2 - 175}{5}$$

PASOS PARA EL ANALISIS

1. Realizar un análisis de varianza para ver la significancia de los factores (aquí podemos ver si hay o no curvatura).

2. Encontrar el modelo de regresión de primer orden.

3. Investigar la idoneidad del modelo de primer orden mediante el anova

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
A:X1	4	1	4	75.47	0.0010
B:X2	1	1	1	18.87	0.0122
X1X2	0.25	1	0.25	4.72	0.0956
Falta de ajuste	10.658	1	10.658	201.09	0.0001
Error puro	0.212	4	0.053		
Total (corr.)	16.12	8			

- HAY PRESENCIA DE CURVATURA

- Es necesario realizar un diseño cuadrático

- Es necesario realizar un diseño de composición central

SERAACE

Servicio de Actualización Académica y Capacitación en Estadística