



DISEÑO DE COMPOSICION CENTRAL

# DISEÑOS DE COMPOSICION CENTRAL

## DISEÑOS PARA AJUSTAR EL MODELO DE SEGUNDO ORDEN

Por lo general debido a la curvatura de la superficie real, el experimentador requiere un modelo cuyo grado sea mayor que o igual a 2. En la mayoría de los casos, el modelo de segundo orden:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_i \sum_j \beta_{ij} x_i x_j \quad i < j$$

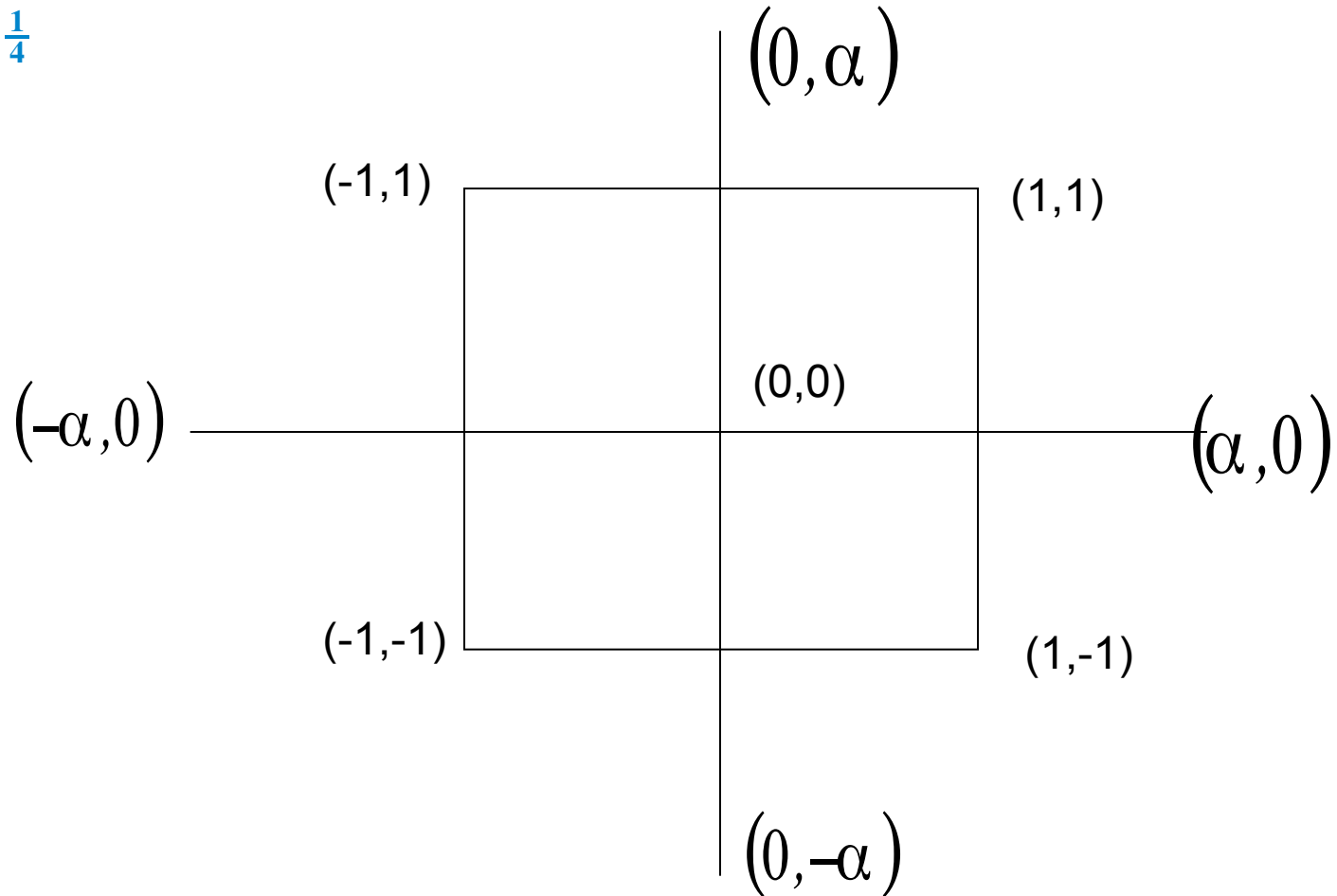
**es adecuado**

## DISEÑOS DE COMPOSICION CENTRAL

- ❑ Este es uno de los diseños mas usados para propósitos de optimización, se conocen como diseño de composición central.
- ❑ Estos diseños se construyen con base en factoriales con dos niveles (lo cual permite la estimación de efectos principales e interacciones)
- ❑ Además, incluyen un conjunto de puntos en los ejes (llamados puntos estrella), los cuales junto con el punto central (por lo general, repetido) permiten estimar los términos cuadráticos puros

Para 2 factores  $\alpha = 1.4142$ , para 3 factores  $\alpha = 1.6818$ , para 4 factores  $\alpha = 2$ , para 5 es  $\alpha = 2.3784$ .

$$\alpha = (2^K)^{\frac{1}{4}}$$



**Ejemplo 3.** Continuando con el ejemplo del ingeniero, al existir curvatura, se decidió realizar un diseño de composición central como se muestra a continuación:

Variables	Naturales	Variables	Codificadas	Respuesta
$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$x_1$	$x_2$	Y
80	170	-1	-1	76.5
90	170	1	-1	78
80	180	-1	1	77
90	180	1	1	79.5
85	175	0	0	79.9
85	175	0	0	80.3
85	175	0	0	80.0
85	175	0	0	79.7
85	175	0	0	79.8
92.07	175	1.414	0	78.4
77.93	175	-1.414	0	75.6
85	182.02	0	1.414	78.5
85	167.93	0	-1.414	77.0

$$x_1 = \frac{\epsilon_1 - 85}{5}$$

$$x_2 = \frac{\epsilon_2 - 175}{5}$$

$$\alpha = 1.4142$$

<b>Fuente</b>	<b>Suma de Cuadrados</b>	<b>Gl</b>	<b>Cuadrado Medio</b>	<b>Razón-F</b>	<b>Valor-P</b>
<b>A:X1</b>	<b>7.9198</b>	<b>1</b>	<b>7.9198</b>	<b>111.93</b>	<b>0.00000</b>
<b>B:X2</b>	<b>2.12316</b>	<b>1</b>	<b>2.12316</b>	<b>30.01</b>	<b>0.00090</b>
<b>AA</b>	<b>13.1761</b>	<b>1</b>	<b>13.1761</b>	<b>186.21</b>	<b>0.00000</b>
<b>AB</b>	<b>0.25</b>	<b>1</b>	<b>0.25</b>	<b>3.53</b>	<b>0.10220</b>
<b>BB</b>	<b>6.97389</b>	<b>1</b>	<b>6.97389</b>	<b>98.56</b>	<b>0.00000</b>
<b>Error total</b>	<b>0.49531</b>	<b>7</b>	<b>0.0707586</b>		
<b>Total (corr.)</b>	<b>28.7431</b>	<b>12</b>			

**R-cuadrada = 98.2768 por ciento**

**R-cuadrada (ajustada por g.l.) = 97.0459 por ciento**

**INFLUYE EL TIEMPO, LA TEMPERATURA, ADEMÁS EL EFECTO CUADRÁTICO DEL TIEMPO Y EL EFECTO CUADRÁTICO DE TEMPERATURA. CON UNA CONFIANZA ESTADÍSTICA DEL 95%.**

		Error	Estadístico	
Parámetro	Estimación	Estándar	T	Valor-P
CONSTANTE	79.94	0.118961	671.985	0.0000
X1	0.994976	0.094047	10.5796	0.0000
X2	0.515166	0.094047	5.47775	0.0009
X1*X2	0.25	0.133002	1.87967	0.1022
X1*X1	-1.37625	0.100854	-13.6459	0.0000
X2*X2	-1.00125	0.100854	-9.92769	0.0000

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Modelo	28.2478	5	5.64955	79.84	0.0000
Residuo	0.49531	7	0.0707586		
Total (Corr.)	28.7431	12			

R-cuadrada = 98.2768 por ciento

R-cuadrado (ajustado para g.l.) = 97.0459 por ciento

$$\text{Rendimiento} = 79.94 + 0.994976 \cdot X1 + 0.515166 \cdot X2 + 0.25 \cdot X1 \cdot X2 - 1.37625 \cdot X1 \cdot X1 - 1.00125 \cdot X2 \cdot X2$$

## MEJOR MODELO REGRESION

		Error	Estadístico	
Parámetro	Estimación	Estándar	T	Valor-P
CONSTANTE	79.94	0.136502	585.633	0.0000
X1	0.994976	0.107914	9.22006	0.0000
X2	0.515166	0.107914	4.77384	0.0014
X1*X1	-1.37625	0.115725	-11.8924	0.0000
X2*X2	-1.00125	0.115725	-8.65195	0.0000

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Modelo	27.9978	4	6.99944	75.13	0.0000
Residuo	0.74531	8	0.0931637		
Total (Corr.)	28.7431	12			

R-cuadrada = 97.407 porciento

R-cuadrado (ajustado para g.l.) = 96.1105 porciento

**Rendimiento = 79.94 + 0.994976\*X1+ 0.515166\*X2 - 1.37625\*X1\*X1 - 1.00125\*X2\*X2**



## MEJOR ANOVA

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
A:A	7.9198	1	7.9198	85.01	0.0000
B:B	2.12316	1	2.12316	22.79	0.0014
AA	13.1761	1	13.1761	141.43	0.0000
BB	6.97389	1	6.97389	74.86	0.0000
Error total	0.74531	8	0.0931637		
Total (corr.)	28.7431	12			

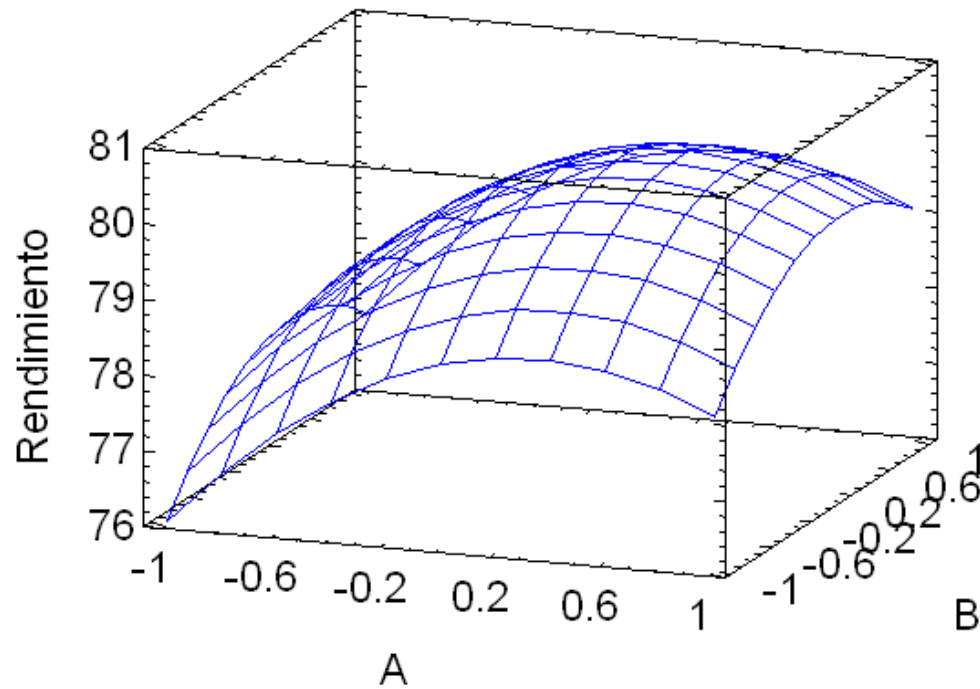
**R-cuadrada = 97.407 por ciento**

**R-cuadrada (ajustada por g.l.) = 96.1105 por ciento**

**INFLUYE EL TIEMPO, LA TEMPERATURA, ADEMÁS EL EFECTO CUADRÁTICO DEL TIEMPO Y EL EFECTO CUADRÁTICO DE TEMPERATURA. CON UNA CONFIANZA ESTADÍSTICA DEL 95%.**

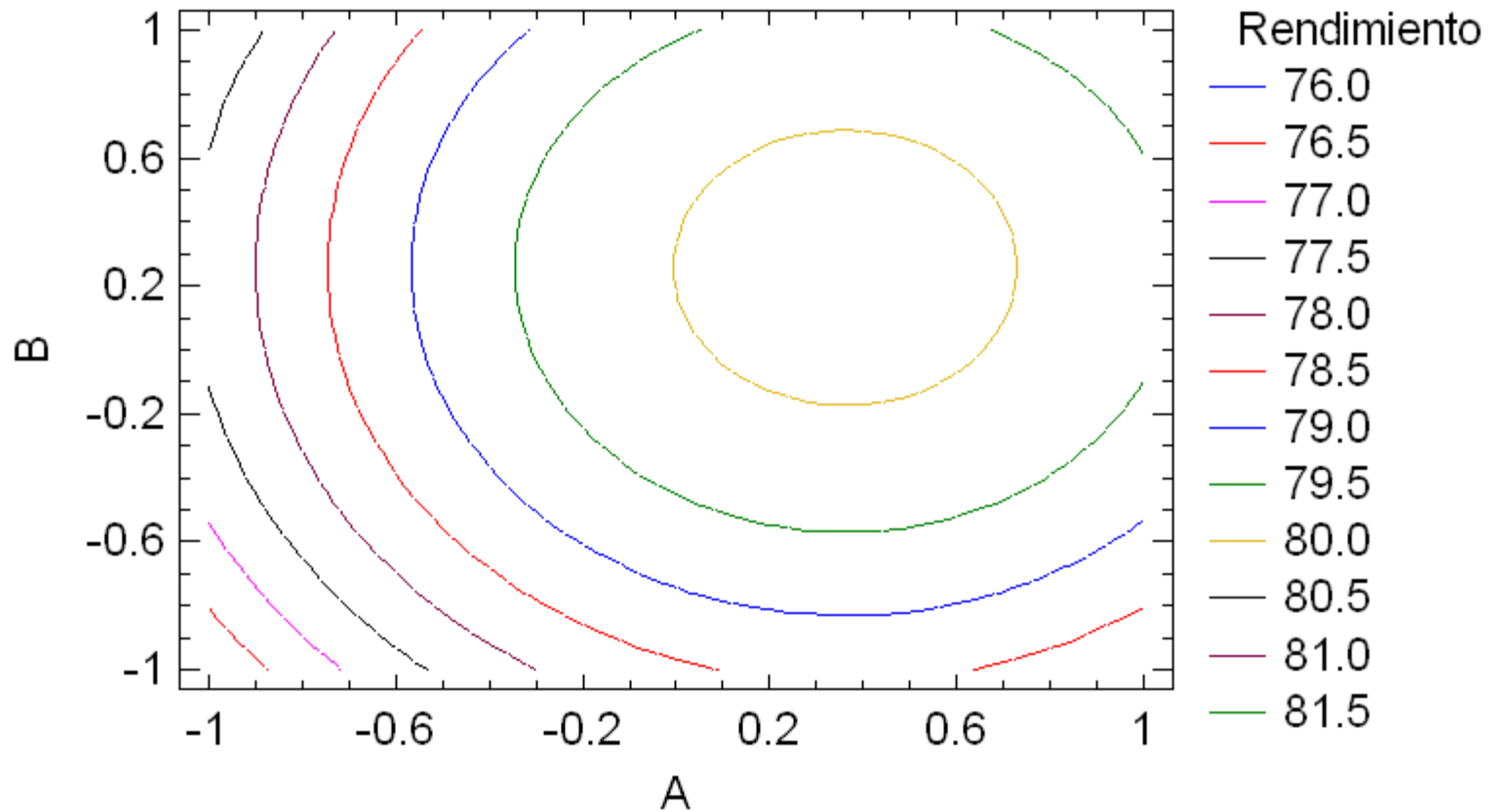
$$\text{Rendimiento} = 79.94 + 0.994976 \cdot X_1 + 0.515166 \cdot X_2 - 1.37625 \cdot X_1 \cdot X_1 - 1.00125 \cdot X_2 \cdot X_2$$

Superficie de Respuesta Estimada

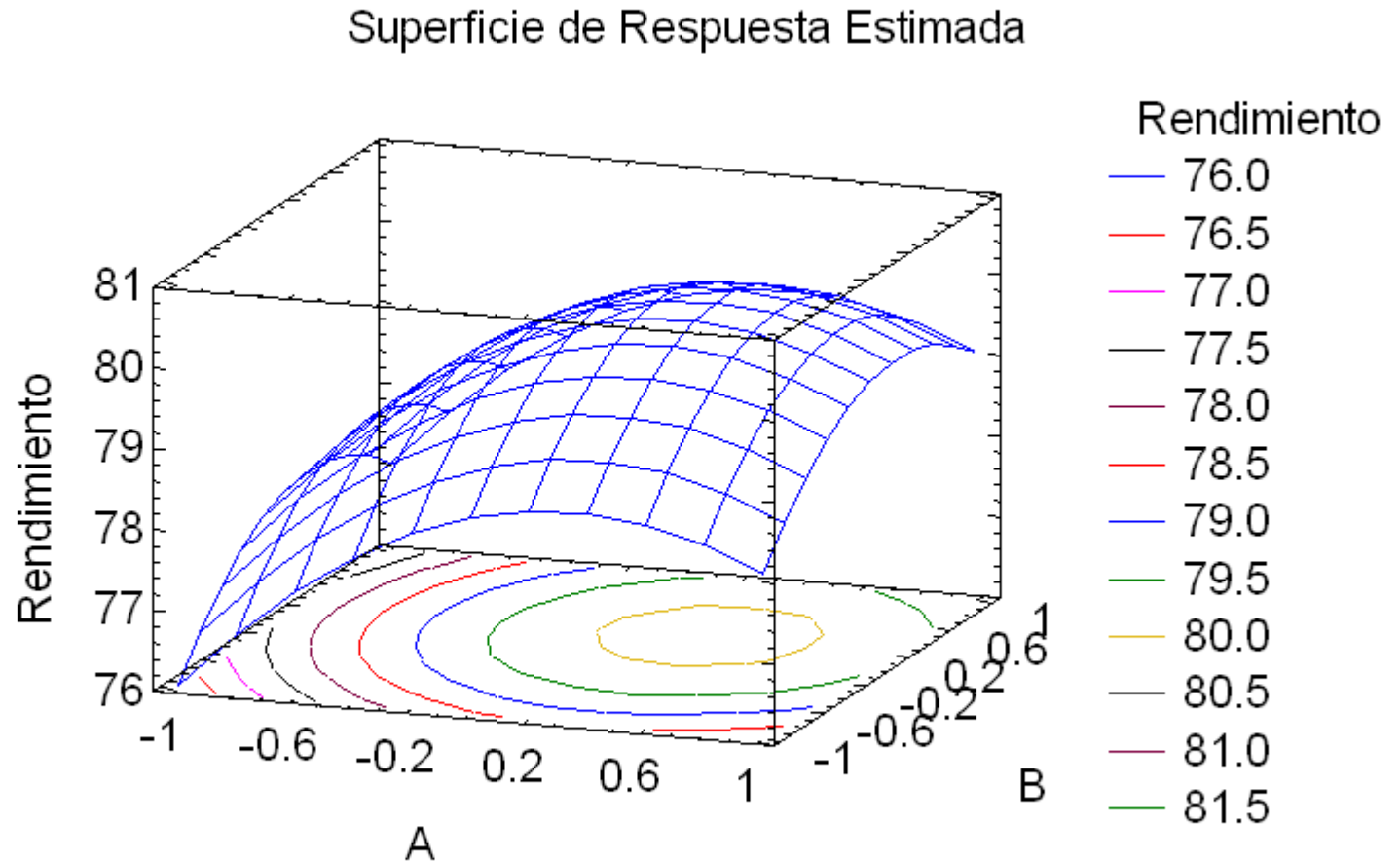


$$\text{Rendimiento} = 79.94 + 0.994976 \cdot X_1 + 0.515166 \cdot X_2 - 1.37625 \cdot X_1 \cdot X_1 - 1.00125 \cdot X_2 \cdot X_2$$

Contornos de la Superficie de Respuesta Estimada



$$\text{Rendimiento} = 79.94 + 0.994976 \cdot X_1 + 0.515166 \cdot X_2 - 1.37625 \cdot X_1 \cdot X_1 - 1.00125 \cdot X_2 \cdot X_2$$



## LOCALIZACIÓN DEL PUNTO MAXIMO O MINIMO

Supongamos que se desea determinar los niveles  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$  que optimizan la variable de respuesta predicha. Este optimo, si existe, será el conjunto de  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ , tal que las derivadas parciales

$$\partial y / \partial x_1 = \partial y / \partial x_2 = \dots = \partial y / \partial x_k = 0$$

Dicho punto, es decir  $x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, \dots, x_{k,0},$

**Es punto máximo o mínimo.**

Una solución general para el punto estacionario, es la siguiente:

$$y = \beta_0 + x'b + x'Bx$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21}/2 & \dots & \beta_{1k}/2 \\ & \beta_{22} & \dots & \beta_{2k}/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \beta_{kk} \end{bmatrix}$$

La derivada de  $y$  con respecto  $x$  e igualada a cero es

$$\frac{\partial y}{\partial x} = b + 2Bx = 0$$

derivando esta ecuación y resolviendo para  $x$  tenemos que el punto estacionario es

$$X_o = -\frac{1}{2} B^{-1} b$$

Para encontrar el punto estacionario del ejemplo del ingeniero, se procede así:

$$\text{Rendimiento} = 79.94 + 0.994976 * X1 + 0.515166 * X2 - 1.37625 * X1 * X1 - 1.00125 * X2 * X2$$

$$b = \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.51 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1.3770 & 0 \\ 0 & -1.0018 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = -\frac{1}{2} B^{-1} b$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -.72621 & 0 \\ 0 & -0.99820 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3594 \\ 0.2545 \end{bmatrix}$$



$$X_o = \begin{bmatrix} 0.3594 \\ 0.2545 \end{bmatrix}$$

ES UN PUNTO DE RESPUESTA MAXIMA

$$0.3594 = \frac{\varepsilon_1 - 85}{5}$$

y

$$0.2545 = \frac{\varepsilon_2 - 175}{5}$$

$$\varepsilon_1 = 86.79$$

$$\varepsilon_2 = 176.2725$$

Evaluando el punto estacionario en el modelo de regresión:

$$\text{Rendimiento} = 79.94 + 0.994976 * X1 + 0.515166 * X2 - 1.37625 * X1 * X1 - 1.00125 * X2 * X2$$

$$\text{Rendimiento} = 79.94 + 0.994976 * (0.3594) + 0.515166 * (0.2545) - 1.37625 * (0.3594) * (0.3594) - 1.00125 * (0.2545) * (0.2545)$$

$$\text{Rendimiento} = 80.18$$

Se obtendría un rendimiento del 80%, Con lo que la ingeniera logra duplicar el rendimiento del proceso.

